

**Opción A**

**Ejercicio 1, Opción A, Modelo 6 de 2012.**

[2'5 puntos] Se considera la función derivable  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{a}{x-2} & \text{si } x < 1 \\ a + \frac{b}{\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ .

Calcula los valores de a y b.

**Solución**

Si f es derivable, f es continua; en particular es continua y derivable en  $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{a}{x-2} & \text{si } x < 1 \\ a + \frac{b}{\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{-a}{(x-2)^2} & \text{si } x < 1 \\ \frac{-b}{2\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{-a}{(x-2)^2} & \text{si } x < 1 \\ \frac{-b}{2x\sqrt{x}} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Como f es continua en  $x = 1$ ,  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( a + \frac{b}{\sqrt{x}} \right) = a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( 1 + \frac{a}{x-2} \right) = 1 - a. \text{ Igualando } a + b = 1 - a, \text{ de donde } 2a + b = 1.$$

Como f es derivable en  $x = 1$ ,  $f'(1^+) = f'(1^-)$ . Vemos la continuidad de la derivada.

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{-b}{2x\sqrt{x}} \right) = -b/2$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{-a}{(x-2)^2} \right) = -a. \text{ Igualando } -a = -b/2, \text{ de donde } b = 2a.$$

$$b = 2a, \text{ de donde } 2a + 2a = 4a = 1 \rightarrow a = 1/4 \text{ y } b = 1/2.$$

**Ejercicio 2, Opción A, Modelo 6 de 2012.**

[2'5 puntos] Sea la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$ . Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto  $(-1, 0)$ .

**Solución**

Una primitiva de  $f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$  es  $F(x) = I = \int (1 - x^2)e^{-x} dx = \{ \text{Integral por partes por partes } \int u dv = uv - \int v du. \text{ En nuestro caso } u = 1 - x^2 \text{ y } dv = e^{-x} dx, \text{ de donde } du = -2x dx \text{ y } v = \int dv = \int e^{-x} = -e^{-x} \} = (1 - x^2)(-e^{-x}) - \int -e^{-x}(-2x dx) = -(1 - x^2)e^{-x} - 2 \int x e^{-x} = -(1 - x^2)e^{-x} - 2I_1$

$I_1 = \int x e^{-x} dx = \{ \text{Integral por partes por partes, en nuestro caso } u = x \text{ y } dv = e^{-x} dx, \text{ de donde } du = dx \text{ y } v = -e^{-x} \} = -x \cdot e^{-x} - \int -e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x}$ , por tanto

$$F(x) = I = \int (1 - x^2)e^{-x} dx = -(1 - x^2)e^{-x} - 2I_1 = -(1 - x^2)e^{-x} - 2(-x \cdot e^{-x} - e^{-x}) + K = e^{-x}(x^2 + 2x + 1) + K$$

Como pasa por  $(-1, 0)$ ,  $F(-1) = 0 \rightarrow e(1 - 2 + 1) + K = 0 = 0 + K = 0$ , de donde  $K = 0$  y la primitiva pedida es  $F(x) = e^{-x}(x^2 + 2x + 1)$

**Ejercicio 3, Opción A, Modelo 6 de 2012.**

Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería por la compra de un libro, una calculadora y un estuche. Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.

(a) [1'25 puntos] ¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora? Razona las respuestas.

(b) [1'25 puntos] Si el precio del libro, la calculadora y el estuche hubieran sufrido un 50 %, un 20% y un 25% de descuento respectivamente, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio de cada artículo.

**Solución**

$x = \text{libro}; y = \text{calculadora} \text{ y } z = \text{estuche}$

Un estudiante ha gastado 57 euros en una papelería por la compra de un libro, una calculadora y un estuche.

Traducción  $x + y + z = 57\text{€}$ .

Sabemos que el libro cuesta el doble que el total de la calculadora y el estuche juntos.

Traducción  $x = 2(y + z)$

(a)  
¿Es posible determinar de forma única el precio del libro? ¿Y el de la calculadora? Razona las respuestas.  
Como tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas

$x + y + z = 57\text{€}$ .

$x = 2(y + z)$ , tenemos un sistema compatible e indeterminado que tiene infinitas soluciones.

**Juan Carlos Schiemann Correia, me envió la solución de que si se puede saber el precio del libro pero no el de la calculadora:**

De  $x = 2(y + z)$ , tenemos  $x/2 = y + z$ , y entrando en la 1ª ecuación resulta  $x + x/2 = 57$ , de donde  $3x/2 = 57$  y nos sale  **$x = 38\text{€}$** .

(b)  
Si el precio del libro, la calculadora y el estuche hubieran sufrido un 50 %, un 20% y un 25% de descuento respectivamente, el estudiante habría pagado un total de 34 euros. Calcula el precio de cada artículo.

Traducción  $0'5x + 0'8y + 0'75z = 34 \text{ €}$

Sustituimos  $x = 2(y + z)$ , en las otras dos ecuaciones:

$2(y + z) + y + z = 57 \rightarrow 3y + 3z = 57 \rightarrow y + z = 19 \rightarrow y = 19 - z$

$0'5 \cdot 2(y + z) + 0'8y + 0'75z = 34 \rightarrow 1'8y + 1'75z = 34 \rightarrow 1'8(19 - z) + 1'75z = 34 \rightarrow 34'2 - 0'05z = 34$ ,  
de donde  $z = 4 \text{ €}$ ,  $y = 19 - 4 = 15 \text{ €}$  y  $x = 2(19) = 38 \text{ €}$ .

**Luego un libro vale  $x = 38 \text{ €}$ , una calculadora  $y = 15 \text{ €}$  y un estuche  $z = 4 \text{ €}$ .**

#### Ejercicio 4, Opción A, Modelo 6 de 2012.

[2'5 puntos] Determina el punto P de la recta  $r \equiv (x+3)/2 = (y+5)/3 = (z+4)/3$  que equidista del origen de coordenadas y del punto A(3, 2, 1).

#### Solución

Ponemos la recta en paramétricas  $r \equiv (x+3)/2 = (y+5)/3 = (z+4)/3 = \lambda \in \mathbb{R}$ , de donde

$x = -3 + 2\lambda$

$y = -5 + 3\lambda$

$z = -4 + 3\lambda$ .

Un punto genérico de la recta "r" es  $P(x,y,z) = P(-3 + 2\lambda, -5 + 3\lambda, -4 + 3\lambda)$ .

Me dicen que  $d(O,P) = d(A,P)$ , es decir  $\|OP\| = \|AP\|$

$OP = (-3 + 2\lambda, -5 + 3\lambda, -4 + 3\lambda) \rightarrow \|OP\| = \sqrt{(-3+2\lambda)^2 + (-5+3\lambda)^2 + (-4+3\lambda)^2} = \sqrt{22\lambda^2 - 66\lambda + 50}$

$AP = (-3 + 2\lambda - 3, -5 + 3\lambda - 2, -4 + 3\lambda - 1) = (-6 + 2\lambda, -7 + 3\lambda, -5 + 3\lambda)$

$\rightarrow \|AP\| = \sqrt{(-6+2\lambda)^2 + (-7+3\lambda)^2 + (-5+3\lambda)^2} = \sqrt{22\lambda^2 - 96\lambda + 110}$ .

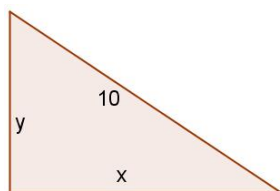
Igualando y elevando al cuadrado tenemos  $22\lambda^2 - 66\lambda + 50 = 22\lambda^2 - 96\lambda + 110 \rightarrow 30\lambda = 60$ , de donde tenemos  $\lambda = 2$ , y **el punto es  $P(-3 + 2(2), -5 + 3(2), -4 + 3(2)) = P(1, 1, 2)$** .

#### Opción B

#### Ejercicio 1, Opción B, Modelo 6 de 2012.

[2'5 puntos] De entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 10 unidades, determina las dimensiones del de área máxima.

#### Solución



Función a optimizar = Área =  $(1/2)xy$

Relación  $y^2 + x^2 = 10^2$ , de donde  $y = \sqrt{100 - x^2}$ , es (+) puesto que es una longitud.

Mi función es  $A(x) = (1/2)x \cdot \sqrt{100 - x^2}$

El máximo anula la 1ª derivada  $A'(x)$

$$A'(x) = (1/2) \cdot \sqrt{100 - x^2} + (1/2)x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - x^2 - x^2}{2\sqrt{100 - x^2}} = \frac{50 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

De  $A'(x) = 0$ , tenemos  $50 - x^2 = 0$ , de donde  $x = +\sqrt{50}$ , pues es una longitud.

Las dimensiones del triángulo son  $x = +\sqrt{50}$  e  $y = \sqrt{100 - (\sqrt{50})^2} = \sqrt{50}$ , luego es un triángulo isósceles.

Veamos que es un máximo, es decir  $A(\sqrt{50}) < 0$ .

$$A'(x) = \frac{50 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$A''(x) = \frac{-2x \cdot \sqrt{100 - x^2} - (100 - x^2) \cdot (\sqrt{100 - x^2})'}{(\sqrt{100 - x^2})^2}$$

$$A''(\sqrt{50}) = \frac{-2\sqrt{50} \cdot \sqrt{50} - (0) \cdot (\sqrt{100 - x^2})'}{(+)} < 0, \text{ luego es máximo.}$$

### Ejercicio 2, Opción B, Modelo 6 de 2012.

Sean las funciones  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $f(x) = x^2/4$  y  $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$  respectivamente.

(a) [0'75 puntos] Halla los puntos de corte de las gráficas de  $f$  y  $g$ . Realiza un esbozo del recinto que limitan.

(b) [1'75 puntos] Calcula el área de dicho recinto.

#### Solución

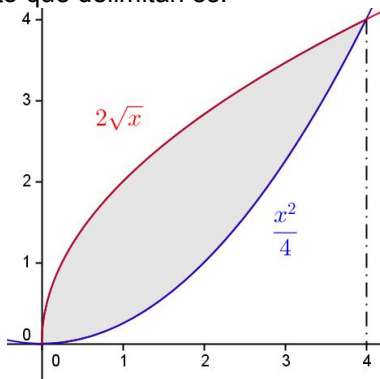
Sean las funciones  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $f(x) = x^2/4$  y  $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$  respectivamente.

(a)  
Halla los puntos de corte de las gráficas de  $f$  y  $g$ . Realiza un esbozo del recinto que limitan.  
La gráfica de  $f(x) = x^2/4$  es parecida a la de  $x^2$  (vértice  $(0,0)$ , ramas hacia arriba), pero un poco más abierta pues para  $x = 1$  vale  $1/4$ .

La gráfica de  $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$  es parecida a la de  $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$  (también es una parábola, pero horizontal en este caso), pero un poco más alargada pues para  $x = 1$  vale 2.

Los corte los calculamos resolviendo la ecuación  $f(x) = g(x)$ , es decir  $x^2/4 = 2 \cdot \sqrt{x}$ . Elevando al cuadrado tenemos  $x^4/16 = 4x$ , luego  $x^4 = 64x \rightarrow x^4 - 64x = x(x^3 - 64) = 0$ , de donde  $x = 0$  y  $x = \sqrt[3]{64} = 4$

Un esbozo de sus gráficas y del recinto que delimitan es:



(b)  
Calcula el área de dicho recinto.

$$\text{Área} = \int_0^4 [(2\sqrt{x}) - (x^2/4)] dx + \int_0^4 [(2x^{1/2}) - (x^2/4)] dx = [2x^{1/2+1}/(1/2+1) - x^3/12]_0^4 = \left[ \frac{4\sqrt{x^3}}{3} - x^3/12 \right]_0^4 =$$

$$= \frac{4\sqrt{4^3}}{3} - 4^3/12 - (0) = \frac{16\sqrt{4}}{3} - \frac{64}{12} = \frac{16\sqrt{4}}{3} - \frac{16}{3} = \frac{16(\sqrt{4} - 1)}{3} \cong 5'33 \text{ u}^2.$$

**Ejercicio 3, Opción B, Modelo 6 de 2012.**

Considera el sistema de ecuaciones 
$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ 2x + ky = 1 \\ y + 2z = k \end{cases}$$

- (a) [1 punto] Clasifica el sistema según los valores del parámetro k.  
 (b) [0'75 puntos] Resuélvelo para k = 1.  
 (c) [0'75 puntos] Resuélvelo para k = -1.

**Solución**

(a)  
 Clasifica el sistema según los valores del parámetro k.

La matriz de los coeficientes del sistema es  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 2 & k & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  y la matriz ampliada  $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 2 & k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & k \end{pmatrix}$ .

Si  $\det(A) = |A| \neq 0$ ,  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = n^\circ$  de incógnitas. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 2 & k & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila} \end{array} = (0) - (1)(-2k) + (2)(k-2) = 2k + 2k - 4 = 4k - 4 \neq 0,$$

Resolviendo la ecuación  $4k - 4 = 0 =$ , obtenemos  $k = 1$ .

Si  $k \neq 1$ ,  $\det(A) = |A| \neq 0$ ,  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = n^\circ$  de incógnitas. **El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

(b)  
 Resuélvelo para k = 1.

Si  $k = 1$  tenemos  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  y  $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

En A como  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ , tenemos  $\text{rango}(A) = 2$

En  $A^*$  como  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ , por tener dos columnas iguales, tenemos  $\text{rango}(A^*) = 2$ . Como  $\text{rango}(A) = 2 =$

$\text{rango}(A^*) = 2$ , **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Como el rango es 2, sólo necesitamos dos ecuaciones; la 2ª y la 3ª (con las que hemos formado el menor distinto de 0 de A).

$$2x + y = 1$$

$$y + 2z = 1. \text{ Tomando } z = a \in \mathbb{R}, \text{ tenemos } y = 1 - 2a, \text{ con lo cual } x = 1/2 - 1/2 + 2a/2 = a.$$

**La solución del sistema es  $(x,y,z) = (a, 1 - 2a, a)$  con  $a \in \mathbb{R}$ .**

(c)  
 Resuélvelo para el caso k = -1.

Ya hemos visto en el apartado (a) que si  $k \neq 1$ ,  $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3$ . **El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

$$x + y - z = 1$$

$$2x - y = 1. \text{ Cambio } F_2 \text{ por } F_3$$

$$y + 2z = -1$$

$$x + y - z = 1$$

$$y + 2z = -1$$

$$2x - y = 1. F_3 + F_1(-2)$$

$$x + y - z = 1$$

$$y + 2z = -1$$

$$-3y + 2z = -1. F_3 + F_2(-1)$$

$$x + y - z = 1$$

$$y + 2z = -1$$

$$-4y = 0, \text{ luego}$$

tenemos que  $y = 0, z = -1/2$  y  $x = 1 - 1/2 = 1/2$ .

**La solución del sistema es  $(x,y,z) = (1/2, 0, -1/2)$ .**

**Ejercicio 4, Opción B, Modelo 6 de 2012.**

Considera el punto  $P(1,0, 2)$  y la recta r dada por las ecuaciones 
$$\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$$

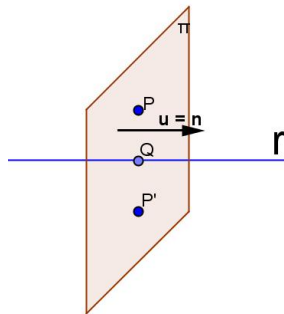
(a) [1 punto] Calcula la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r.

(b) [1'5 puntos] Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r.

**Solución**

Considera el punto P(1,0, 2) y la recta r dada por las ecuaciones  $\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$

(a)  
Calcula la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r.  
Utilizamos un mismo dibujo para los dos apartados



El plano  $\pi$  que pasa por P y es perpendicular a la recta “r” tiene como vector normal  $\mathbf{n}$  el vector director de la recta  $\mathbf{v}$ . El plano tiene de ecuación  $\pi \equiv \mathbf{PX} \cdot \mathbf{n} = 0$ , donde  $\cdot$  es el producto escalar y X es un punto generico del plano.

Un vector director  $\mathbf{w}$  lo sacamos como producto vectorial (x) de los vectores normales que determinan dicha recta.

$$\mathbf{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-2) - \mathbf{j}(4) + \mathbf{k}(2) = (-2, -4, 2). \text{ Otro mas sencillo es } \mathbf{v} = (-1, -2, 1) = \mathbf{n}$$

P(1,0, 2)

El plano pedido es  $\pi \equiv \mathbf{PX} \cdot \mathbf{n} = 0 = (x-1, y, z-2) \cdot (-1, -2, 1) = -x+1-2y+z-2 = -\mathbf{x-2y+z-1} = 0$

(b)  
Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r.  
Para calcular el punto simétrico de P respecto a la recta “r”, calculamos el plano  $\pi$  que pasa por P y es perpendicular a la recta “r”, ya calculado en el apartado (a) que es  $\pi \equiv -\mathbf{x-2y+z-1} = 0$   
Calculamos el punto Q intersección perpendicular de la recta “r” con el plano  $\pi$ , y tenemos en cuenta que Q es el punto medio del segmento PP’, siendo P’ el simétrico buscado.

$$Q = r \cap \pi$$

Ponemos la recta en paramétricas, por lo cual necesitamos un punto A de ella  $\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$

Tomando  $y = 0$ , sale  $x = 2$  y  $z = 4$ , El punto es A(2,0,4). Su vector director era  $\mathbf{v} = (-1, -2, 1)$ .

Un punto genérico “r” es  $(2-b, -2b, 4+b)$  con  $b \in \mathbb{R}$ .

Entramos en  $\pi \rightarrow - (2-b) - 2(-2b) + (4+b) - 1 = 0 = b+4b+b-2+4-1 = 6b + 1 = 0$ , de donde  $b = -1/6$  y el punto

Q es  $Q(2 - (-1/6), -2(-1/6), 4 + (-1/6)) = Q(13/6, 2/6, 23/6)$

Q es punto medio del segmento PP’  $\pi \rightarrow (13/6, 2/6, 23/6) = ((1+x)/2, (0+y)/2, (2+z)/2)$ . Igualando:

$$13/6 = (1+x)/2, \text{ de donde } x = 13/3 - 1 = 10/3$$

$$2/6 = (0+y)/2, \text{ de donde } z = 2/3 - 0 = 2/3$$

$$23/6 = (2+z)/2, \text{ de donde } z = 23/3 - 2 = 17/3$$

**El simétrico buscado es P'(10/3, 2/3, 17/3)**